Методы решения уравнений высших степеней.

I) Решение уравнений с помощью деления в столбик.

$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$

Очевидно $x = 2$ - корень уравнения

$(x^3 - 2x^2 - 23x + 60)(x - 2) = 0$

Очевидно $x = 3$ - корень уравнения

$(x^2 + x - 20)(x - 3)(x - 2) = 0$

$(x - 4)(x + 5)(x - 3)(x - 2) = 0$

Ответ: -5;2;3;4

II) Возвратные уравнения и к ним сводящиеся.

$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-1} x + a_n = 0$

Уравнение называется возвратным, если в нем коэффициенты равноудаленные от концов совпадают, т.е. $a_0 = a_n$, $a_1 = a_{n-1}$, $a_2 = a_{n-2}$

1) Возвратные уравнения четной степени.

$2x^4 + 9x^3 - x^2 + 9x + 2 = 0$

т.к. $x = 0$ - не является корнем уравнения, то разделим обе части уравнения на $x^2 \neq 0$.

$2x^2 + 9x - 1 + \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$

$2(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 9(x + \frac{1}{x}) - 1 = 0$

Введем замену.

Пусть $x + \frac{1}{x} = y$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, получим

$2y^2 + 9y - 5 = 0$ $\qquad$ $y_1 = -5$; $y_2 = \frac{1}{2}$

Вернемся к замене.

$x + \frac{1}{x} = -5$ $\qquad$ или $\qquad$ $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

$\frac{x^2 + 5x + 1}{x} = 0$ $\qquad$ $\frac{2x^2 - x + 2}{2x} = 0$

$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$ $\qquad$ корней нет

Ответ: $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$

2) Возвратные уравнения нечетной степени.

Любое возвратное уравнение нечетной степени сводится к квадратному уравнению четной степени, т.к у любого возвратного ур–ия нечетной степени один из корней **всегда равен –1**

$x^7 + 2x^6 - 5x^5 - 13x^4 - 13x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$

Очевидно $x = -1$ - корень уравнения.

$(x + 1)(x^6 + x^5 - 6x^4 - 7x^3 - 6x^2 + x + 1) = 0$

$x = -1$ $\qquad$ или $\qquad$ $x^6 + x^5 - 6x^4 - 7x^3 - 6x^2 + x + 1 = 0$

т.к $x = 0$ - не является корнем уравнения, то разделим обе части уравнения на $x^3 \neq 0$

$x^3 + x^2 - 6x - 7 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0$

$(x^3 + \frac{1}{x^3}) + (x^2 + \frac{1}{x^2}) - 6(x + \frac{1}{x}) - 7 = 0$

Введем замену.

Пусть $x+\frac{1}{x}=y$, $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$, $x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$, получим

$y^3+y^2-9y-9=0$

$(y+1)(y-3)(y+3)=0$

$y=-1$ или	$y=3$ или	$y=-3$
$x+\frac{1}{x}=-1$	$x+\frac{1}{x}=3$	$x+\frac{1}{x}=-3$
$\frac{x^2+x+1}{x}=0$	$\frac{x^2-3x+1}{x}=0$	$\frac{x^2+3x+1}{x}=0$
корней нет	$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$	$x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

Ответ: $x=-1$, $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, $x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

III) Уравнения вида $ax^4+bx^3+cx^2+dx+l=0$, где $\frac{a}{l}=\frac{b^2}{d^2}$ решаются как возвратные.

IV) Замена переменных по явным признакам.

V) В следующих уравнениях используется “идея однородности”.

Пример №1

$$5\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-44\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+12\frac{x^2-4}{x^2-1}=0$$

Введем замену.

Пусть $\frac{x-2}{x+1}=U$, $\frac{x+2}{x-1}=V$, тогда

$5U^2-44V^2+12UV=0$

1) если $V=0$, тогда $U=0$, тогда

$$\begin{cases}\frac{x-2}{x+1}=0\\ \frac{x+2}{x-1}=0\end{cases}$$

$\begin{cases}x=2\\ x=-2\end{cases}$ решений нет

2) Разделим обе части уравнения на $V^2\neq 0$, получим

$$5\left(\frac{U}{V}\right)^2+12\frac{U}{V}-44=0$$

Решим последнее уравнение, как квадратное относительно $\frac{U}{V}$, получим

$\frac{U}{V}=2$; $\frac{U}{V}=-\frac{22}{5}$

$U=2V$; $5U=-22V$

Вернемся к замене.

$\frac{x-2}{x+1}=\frac{2(x+2)}{x-1}$ или $\frac{5(x-2)}{x+1}=-\frac{22(x+2)}{x-1}$

$x^2+9x+2=0$ $\qquad\qquad$ $9x^2+17x+18=0$ корней нет

$x_{1,2}=\dfrac{-9\pm\sqrt{73}}{2}$

Ответ: $x_{1,2}=\dfrac{-9\pm\sqrt{73}}{2}$

Пример №2.

$x\left(\dfrac{5-x}{x+1}\right)\left(x+\dfrac{5-x}{x+1}\right)=6$ $\qquad\qquad$ $x\neq -1$

Пусть $x\dfrac{5-x}{x+1}=U$, $x+\dfrac{5-x}{x+1}=V$, тогда $UV=6$

Найдем $U+V=x\dfrac{5-x}{x+1}+x+\dfrac{5-x}{x+1}=5$

Составим систему:

$\begin{cases}UV=6\\U+V=5\end{cases}$

Решая систему подстановкой, получим

$\begin{cases}U_1=3\\V_1=2\end{cases}$ $\qquad$ или $\qquad$ $\begin{cases}U_2=2\\V_2=3\end{cases}$

$\begin{cases}x\dfrac{5-x}{x+1}=3\\x+\dfrac{5-x}{x+1}=2\end{cases}$ $\qquad\qquad$ $\begin{cases}x\dfrac{5-x}{x+1}=2\\x+\dfrac{5-x}{x+1}=3\end{cases}$

$\begin{cases}x^2-2x+3=0\\x^2-2x+3=0\end{cases}$ $\qquad\qquad$ $\begin{cases}x^2-3x+2=0\\x^2-3x+2=0\end{cases}$

корней нет $\qquad\qquad$ $x_1=2$; $x_2=1$

Ответ: $x_1=2$; $x_2=1$

Пример №3.

$2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$

$x=1$ - не является корнем уравнения

Разделим обе части уравнения на $(x-1)^2\neq 0$, получим

$2\left(\dfrac{x^2+x+1}{x-1}\right)-7-13\dfrac{x^2+x+1}{x-1}=0$

Введем замену.

Пусть $\dfrac{x^2+x+1}{x-1}=y$, тогда

$2y^2-13y-7=0$

$y_1=7$; $y_2=-\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{x^2+x+1}{x-1}=7$ $\qquad$ или $\qquad$ $\dfrac{x^2+x+1}{x-1}=-\dfrac{1}{2}$

$x^2-6x+8=0$ $\qquad\qquad$ $2x^2+3x+1=0$

$x_1=4$; $x_2=2$ $\qquad\qquad$ $x_3=-1$; $x_4=-\dfrac{1}{2}$

Ответ: $x_1=4$; $x_2=2$; $x_3=-1$; $x_4=-1/2$

VI) Уравнения вида $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=k$, где $a+b=c+d$ эффективно решать перемножением $(x-a)(x-b)$ и $(x-c)(x-d)$, а затем делать замену.

VII) В уравнениях вида $\dfrac{Ax}{ax^2+b_1x+c}+\dfrac{Bx}{ax^2+b_2x+c}=k$ и в уравнениях к ним сводящимся, в знаменателях обоих дробей необходимо вынести x за скобки и сделать замену.

$$\frac{3x}{2x^2+5x+2}+\frac{5x}{2x^2+11x+2}=\frac{2}{3} \qquad (1) \qquad x\neq -2;-\frac{1}{2};\frac{-11\pm\sqrt{105}}{2}$$

$$\frac{3x}{x\left(2x+5+\frac{2}{x}\right)}+\frac{5x}{x\left(2x+11+\frac{2}{x}\right)}=\frac{2}{3} \qquad (2)$$

При переходе $(1)\to(2)$ область определения уравнения сузилась на $x\neq 0$. Проверим, является ли $x=0$ корнем уравнения. Не является.

$$\frac{3}{2x+5+\frac{2}{x}}+\frac{5}{2x+11+\frac{2}{x}}=\frac{2}{3}$$

Введем замену.

Пусть $2x+5+\dfrac{2}{x}=y$, $2x+11+\dfrac{2}{x}=y+6$, тогда

$$\frac{3}{y}+\frac{5}{y+6}=\frac{2}{3}$$

$y_1=9$; $y_2=-3$

$2x+5+\dfrac{2}{x}=9$ или $2x+11+\dfrac{2}{x}=-3$

$2x^2-4x+2=0$ $\qquad$ $2x^2+8x+2=0$

$x_1=1$ $\qquad$ $x_{2,3}=-2\pm\sqrt{3}$

Ответ: $x_1=1$; $x_{2,3}=-2\pm\sqrt{3}$

VIII) В уравнениях вида $(ax^2+b_1x+c)(ax^2+b_2x+c)=kx^2$ обе части уравнения делятся на $x^2\neq 0$

$$(2x^2-3x+1)(2x^2+5x+1)=9x^2$$

$x=0$ - не является корнем уравнения. Разделим на $x^2\neq 0$, получим

$$\left(2x-3+\frac{1}{x^2}\right)\left(2x+5+\frac{1}{x^2}\right)=9$$

Введем замену.

Пусть $2x-3+\dfrac{1}{x^2}=y$; $2x+5+\dfrac{1}{x^2}=y+8$, тогда

$y^2+8y-9=0$

$y_1=-9$; $y_2=1$

$2x-3+\dfrac{1}{x^2}=-9$ или $2x-3+\dfrac{1}{x^2}=1$

$x_{1,2}=\dfrac{-3\neq\sqrt{7}}{2}$ $\qquad$ $x_{3,4}=\dfrac{-2\pm\sqrt{2}}{2}$

Ответ: $x_{1,2}=\dfrac{-3\neq\sqrt{7}}{2}$; $x_{3,4}=\dfrac{-2\pm\sqrt{2}}{2}$

IX) Выделение полного квадрата.

$x^2+\frac{81x^2}{(9+x)^2}=40$ $\qquad x\neq -9$

$\left(x-\frac{9x}{9+x}\right)^2+\frac{2\cdot 9x^2}{9+x}=40$

$\left(x-\frac{9x}{9+x}\right)^2+18\frac{x^2}{9+x}=40$

Введем замену.

Пусть $\frac{x^2}{9+x}=y$, тогда

$y^2+18y-40=0$

$y_1=2$; $y_2=-20$

Вернемся к замене.

$\frac{x^2}{9+x}=2$ или $\frac{x^2}{9+x}=-20$

$x^2-2x-18=0$ $\qquad x^2+2x+180=0$

$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{19}$ $\qquad$ корней нет

Ответ: $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{19}$

X) Решение уравнений с помощью формулы $(a^2-b^2)=(a-b)(a+b)$

$x^4+4x^3+3x^2+2x-1=0$

$x^4+4x^3+4x^2-x^2+2x-1=0$

$(x^2+2x)^2-(x-1)^2=0$

$(x^2+2x+x-1)(x^2+2x-x+1)=0$

$x^2+3x-1=0$ или $x^2+x+1=0$

$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$ $\qquad$ корней нет

XI) Уравнения вида $(x-a)^n+(x-b)^n=k$ и к ним сводящиеся решаются при помощи замены $y=x-\frac{a+b}{2}$

$(x+3)^4+(x+5)^4=16$

Введем замену.

Пусть $y=x+4$, тогда

$(y-1)^4+(y+1)^4=16$

$(y^2-2y+1)^2+(y^2+2y+1)^2=16$

$y^4+4y^2+1-4y^3+2y^2-4y+y^4+4y^2+1+4y^3+4y+2y^2=16$

$y^4+6y^2-7=0$

$y^2=1$ или $y^2=-7<0$ корней нет

$y_1=1$; $y_2=-1$

Вернемся к замене.

$x+4=1$ или $x+4=-1$

$x_1=-3$ $\qquad x_2=-5$

Ответ: $x_1=-3$; $x_2=-5$

XII) Решение уравнений относительно коэффициентов.

$x^6 - 7x^2 + \sqrt{6} = 0$

$x^6 - ((\sqrt{6})^2 + 1)x^2 + \sqrt{6} = 0$

$x^6 - x^2(\sqrt{6})^2 - x^2 + \sqrt{6} = 0$

$x^2(\sqrt{6})^2 - \sqrt{6} - x^2 - x^6 - = 0$

$a = x^2 \qquad b = -1 \qquad c = x^2 - x^6$

$D = 1 - 4x^2(x^2 - x^6) = 1 - 4x^4 + 4x^8 = (2x^4 - 1)^2$

$\sqrt{6} = \dfrac{1 - \left|2x^4 - 1\right|}{2x^2}$ или $\sqrt{6} = \dfrac{1 + \left|2x^4 - 1\right|}{2x^2}$

$2\sqrt{6}x^2 = 1 - \left|2x^4 - 1\right|$

$2\sqrt{6}x^2 = 1 - 2x^4 + 1$

$x^4 + \sqrt{6}x^2 - 1 = 0$

$x^2 = \dfrac{-\sqrt{6} - \sqrt{10}}{2} < 0$; $x^2 = \dfrac{-\sqrt{6} + \sqrt{10}}{2}$

корней нет $\qquad x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{-\sqrt{6} + \sqrt{10}}{2}}$

$2\sqrt{6}x^2 = 1 + \left|2x^4 - 1\right|$

$2\sqrt{6}x^2 = 1 + 2x^4 - 1$

$x^4 - \sqrt{6}x^2 = 0$

$x = 0$ - посторонний корень

$x^2 = \sqrt{6}$

$x_{3,4} = \pm\sqrt[4]{6}$

Ответ: $x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{-\sqrt{6} + \sqrt{10}}{2}}$; $x_{3,4} = \pm\sqrt[4]{6}$

XIII) Метод разложения на простейшие дроби.

$\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x-2}{x+2} + \dfrac{x-3}{x+3} + \dfrac{x+4}{x-4} = 4 \qquad x \neq 1; -2; -3; 4$

$\dfrac{x-1+2}{x-1} + \dfrac{x+2-4}{x+2} + \dfrac{x+3-6}{x+3} + \dfrac{x-4+8}{x-4} = 4$

$1 + \dfrac{2}{x-1} + 1 - \dfrac{4}{x+2} + 1 - \dfrac{6}{x+3} + 1 + \dfrac{8}{x-4} = 4$

$\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x+2} - \dfrac{3}{x+3} + \dfrac{4}{x-4} = 0$

$\dfrac{x-4+4x-1}{(x-1)(x-4)} - \dfrac{2x+6+3x+6}{(x+2)(x+3)} = 0$

$\dfrac{5x-8}{(x-1)(x-4)} - \dfrac{5x+12}{(x+2)(x+3)} = 0$

$5x^2 + 5x - 16 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{345}}{10}$

Ответ: $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{345}}{10}$