

19

Множество чисел назовём *хорошим*, если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.

а) Является ли множество  $\{200; 201; 202; \dots; 299\}$  *хорошим*?

б) Является ли множество  $\{2; 4; 8; \dots; 2^{100}\}$  *хорошим*?

в) Сколько *хороших* четырёхэлементных подмножеств у множества

$\{1; 2; 4; 5; 7; 9; 11\}$ ?

Решение.

а) Разобьём множество  $\{200; 201; 202; \dots; 299\}$  на 50 пар, сумма чисел в каждой из которых равна 499:  $\{200; 299\}, \{201; 298\}, \dots$

Множество  $\{200; 201; 202; \dots; 299\}$  можно разбить на два подмножества, в каждом из которых по 25 таких пар. Значит, сумма чисел в этих двух подмножествах одинакова и множество  $\{200; 201; 202; \dots; 299\}$  является *хорошим*.

б) Заметим, что  $2^{100} > 2^{100} - 1 = 2^{99} + 2^{98} + \dots + 4 + 2 + 1$ . Поэтому сумма чисел в подмножестве множества  $\{2; 4; 8; \dots; 2^{100}\}$ , содержащем  $2^{100}$ , всегда больше суммы остальных чисел, следовательно, множество  $\{2; 4; 8; \dots; 2^{100}\}$  не является *хорошим*.

в) Заметим, что четырёхэлементное множество является *хорошим* в двух случаях: либо одно число является суммой трёх других, либо множество содержит две пары чисел с равными суммами.

Подмножества множества  $\{1; 2; 4; 5; 7; 9; 11\}$ , удовлетворяющие первому случаю, — это  $\{1; 2; 4; 7\}, \{2; 4; 5; 11\}$ .

Рассмотрим второй случай. Заметим, что числа 2 и 4 либо одновременно входят в *хорошее* четырёхэлементное подмножество, либо одновременно не входят в него, поскольку сумма всех чисел *хорошего* подмножества чётна. Если 2 и 4 входят в подмножество, то либо сумма двух других чисел равна 6 — это единственное подмножество  $\{1; 2; 4; 5\}$ , либо разность двух других чисел равна 2. Получаем *хорошие* подмножества:

$$\{1; 2; 4; 5\}, \{2; 4; 5; 7\}, \{2; 4; 7; 9\}, \{2; 4; 9; 11\}.$$

Если 2 и 4 не входят в подмножество, то *хорошее* подмножество лежит в множестве  $\{1; 5; 7; 9; 11\}$ . Получаем *хорошие* подмножества:

$$\{1; 5; 7; 11\}, \{5; 7; 9; 11\}.$$

Всего получилось 8 *хороших* подмножеств.

Ответ: а) да; б) нет; в) 8.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а; — обоснованное решение п. б; — в п. в доказано, что множество содержит не более восьми <i>хороших</i> четырёхэлементных подмножеств; — в п. в построены примеры восьми <i>хороших</i> четырёхэлементных подмножеств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4