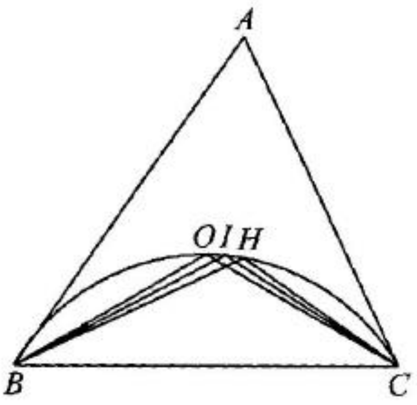
Решение.

а) Точка O — центр описанной окружности около треугольника ABC, поэтому

$$\angle BOC = 2\angle BAC.$$



Значит,

$$180° = \angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = \\ = 2\angle BAC + \angle BAC = 3\angle BAC,$$

откуда

$$\angle BAC = 60°;\ \angle BOC = 120°.$$

Найдём угол BIC:

$$\angle BIC = 180° - \angle IBC - \angle ICB = 180° - \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2} = 180° - \frac{180° - \angle BAC}{2} = 120°.$$

Значит, $\angle BOC = \angle BIC$, поэтому точки B, O, I и C лежат на одной окружности.

б) Найдём угол BHC:

$$\angle BHC = 180° - \angle HBC - \angle HCB = 180° - (90° - \angle ACB) - (90° - \angle ABC) = \\ = \angle ACB + \angle ABC = 180° - \angle BAC = 120°.$$

Значит, $\angle BOC = \angle BIC = \angle BHC$, поэтому точки B, O, I, H и C лежат на одной окружности.

Поскольку $\angle BAC = 60°$, $\angle ABC = 55°$, получаем $\angle ACB = 65°$. В равнобедренном треугольнике BOC имеем $\angle OBC = \dfrac{180° - \angle BOC}{2} = 30°$.

Поскольку прямая BH перпендикулярна AC, получаем

$$\angle HBC = 90° - \angle ACB = 25°.$$

Значит, $\angle HBO = \angle OBC - \angle HBC = 5°$.

Биссектриса угла треугольника лежит внутри угла, образованного медианой и высотой, исходящими из той же вершины, поэтому лучи BH, BI и BO пересекают дугу окружности в указанном на рисунке порядке. Четырёхугольник $BOIH$ вписан в окружность, поэтому

$$\angle OIH = 180° - \angle HBO = 175°.$$

Ответ: б) $175°$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

16 Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, I — центр вписанной в него окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

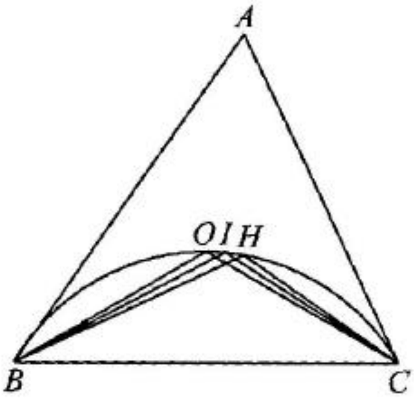
а) Докажите, что точка I лежит на окружности, описанной около треугольника BOC.

б) Найдите угол OIH, если $\angle ABC = 55°$.

Решение.

а) Точка O — центр описанной окружности около треугольника ABC, поэтому

$$\angle BOC = 2\angle BAC.$$



Значит,

$$180° = \angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = \\ = 2\angle BAC + \angle BAC = 3\angle BAC,$$

откуда

$$\angle BAC = 60°;\ \angle BOC = 120°.$$

Найдём угол BIC:

$$\angle BIC = 180° - \angle IBC - \angle ICB = 180° - \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2} = 180° - \frac{180° - \angle BAC}{2} = 120°.$$

Значит, $\angle BOC = \angle BIC$, поэтому точки B, O, I и C лежат на одной окружности.

б) Найдём угол BHC:

$$\angle BHC = 180° - \angle HBC - \angle HCB = 180° - (90° - \angle ACB) - (90° - \angle ABC) = \\ = \angle ACB + \angle ABC = 180° - \angle BAC = 120°.$$

Значит, $\angle BOC = \angle BIC = \angle BHC$, поэтому точки B, O, I, H и C лежат на одной окружности.

Поскольку $\angle BAC = 60°$, $\angle ABC = 55°$, получаем $\angle ACB = 65°$. В равнобедренном треугольнике BOC имеем $\angle OBC = \dfrac{180° - \angle BOC}{2} = 30°$.

Поскольку прямая BH перпендикулярна AC, получаем

$$\angle HBC = 90° - \angle ACB = 25°.$$

Значит, $\angle HBO = \angle OBC - \angle HBC = 5°$.

Биссектриса угла треугольника лежит внутри угла, образованного медианой и высотой, исходящими из той же вершины, поэтому лучи BH, BI и BO пересекают дугу окружности в указанном на рисунке порядке. Четырёхугольник $BOIH$ вписан в окружность, поэтому

$$\angle OIH = 180° - \angle HBO = 175°.$$

Ответ: б) $175°$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* **ИЛИ** имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, **ИЛИ** при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, **ИЛИ** обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3