Основной государственный экзамен (ОГЭ), 9 класс

По окончанию 9-го класса все учащиеся сдают обязательный экзамен по математике в форме Государственной итоговой аттестации. Подготовка к такому достаточно серьезному испытанию должна проводиться на протяжении многих лет. Этот экзамен проверяет знания, умения и навыки работы учащихся с различными математическими объектами, с которыми они познакомились в течение девятилетнего курса математики. Поэтому актуальность этой темы безусловна.

Из года в год девятиклассники сдают ГИА, и перед учителем стоит задача максимально подготовить их к экзамену, предлагая на каждом этапе обучения систему задач и упражнений для оптимального усвоения материала. ГИА предполагает вопросы и задания из различных тем курса «Алгебра» и «Геометрия» основной школы, поэтому целесообразно при изучении конкретного раздела обращать внимание учащихся на те типы заданий, которые могут встретится им в итоговой аттестации.

Классификацию задач ГИА можно проводить различными способами. Наиболее оптимальный, на мой взгляд, провести распределение задач по их порядковому номеру в работе ГИА, ориентируясь на кодификатор и демоверсию 2015 года, и проанализировать, на каком этапе обучения в основной школе мы можем обратить внимание учащихся на данный тип заданий.

Содержание:

§1.1. Общая структура ОГЭ

Прежде чем приступить к самой классификации и рассмотрению конкретных задач, посмотрим на общую структуру ОГЭ.

Итак, экзаменационная работа по математике за курс основной школы проводится на территории РФ в порядке эксперимента. Начиная с 2004 года сама работа претерпела ряд изменений. Было изменено количество заданий, их сложность, балльная стоимость. По последним данным кодификатора и демонстрационного варианта 2015 года работа состоит из трех модулей: «Алгебра», «Геометрия», «Реальная математика». Для получения положительной оценки необходимо не только набрать некоторое минимальное количество баллов за всю работу, но и получить определенный балл по каждому модулю.

Согласно спецификации экзаменационная работа состоит из двух частей:

1. *Первая часть* предполагает выполнение тестовых заданий, при этом ответы фиксируются учениками непосредственно на бланке теста. В первую часть входят задания с выбором ответа, кратким ответом и установлением соответствия.

2. *Вторая часть* имеет вид традиционной контрольной работы и состоит из 6 заданий, в которых в соответствии со спецификацией представлены следующие разделы программного материала: выражения и их преобразования, уравнения и системы уравнений, текстовые задачи, неравенства, функции, координаты и графики, последовательности и прогрессии, планиметрия. При выполнении второй части работы учащиеся должны продемонстрировать умение математически грамотно записывать решение (оно должно включать необходимые пояснения и обоснования, из которых должен быть понятен ход рассуждений). Вторая часть присутствует только в модулях «Алгебра» и «Геометрия».

Далее перейдем к самой классификации. Я разделила задания на 2 группы: те, что встречаются в первой части работы и предполагают тестовую форму, и те, что встречаются во второй части работы, где предусматривается запись полного и обоснованного решения.

§1.2. Первая часть ОГЭ

Модуль «Алгебра»

Задание №1

Первое задание экзаменационной работы проверяет умение учащихся выполнять вычисления и преобразования. В этом задании от учащихся требуется знание арифметических действий над натуральными числами, дробями, действительными числами, понятие степени с натуральным показателем, решение вычислительных задач, умение сравнивать числа, что учащиеся изучают в программе 5-6 классов. Поэтому такое задание посильно даже младшим учащимся средней ступени.

Приведем конкретные примеры заданий, которые встречаются в ОГЭ прошлых лет и в КИМах 2014 года.

Примеры заданий:

1. Найдите значение выражения $5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 - 16 \cdot \frac{1}{5}$

Решение.

Вынесем общий множитель за скобки: $\frac{1}{5}\left(5 \cdot \frac{1}{5} - 16\right) = \frac{1}{5} \cdot (-15) = -3.$

Ответ: -3.

2. Найдите значение выражения $\frac{5{,}6 \cdot 0{,}3}{0{,}8}$

Решение. $\frac{5{,}6 \cdot 0{,}3}{0{,}8} = \frac{5{,}6}{0{,}8} \cdot 0{,}3 = 7 \cdot 0{,}3 = 2{,}1$

Ответ: 2,1.

3. Найдите значение выражения $80 + 0{,}9 \cdot (-10)^3$

Решение. $80 + 0{,}9 \cdot (-10)^3 = 80 + 0{,}9 \cdot (-1000) = 80 - 900 = -810$

Ответ: -810.

4. Укажите выражение, значение которого является наименьшим.

1) $\frac{2}{0{,}3}$ 2) $2 \cdot 0{,}3$ 3) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ 4) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

Решение. Упростим заданные числовые выражения:

1) $\frac{2}{0{,}3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$

2) $2 \cdot 0{,}3 = 0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

3) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

4) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

Очевидно, что выбирать нужно из второго или третьего варианта. Приведем полученные в них дроби к общему знаменателю. Получим:

$$\frac{3}{5} = \frac{18}{30}, \frac{1}{6} = \frac{5}{30}, \frac{18}{30} > \frac{5}{30}$$

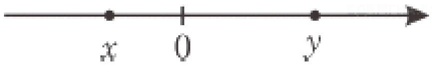
Следовательно, правильным является ответ под номером 3.

Задание №2

Второе задание экзаменационной работы проверяет умения учащихся работать с числами и величинами, изображать числа точками на координатной прямой, требует знания геометрического смысла модуля и числовых промежутков. Эти навыки и умения формируются у учащихся практически на протяжении всего курса изучения математики и алгебры, поэтому для выпускников 8-го класса данное задание можно считать посильным. Приведем конкретные примеры заданий.

Примеры заданий:

1. На координатной прямой отмечены числа x и y:



Какое из следующих утверждений неверно?

1. $xy < 0$
2. $y - x < 0$
3. $x^2y > 0$
4. $x + y > 0$

Решение. Заметим, что $x < 0, y > 0$ и $|x| < |y|$. Проверим все варианты ответа:

1) $xy < 0$ - *верно*,

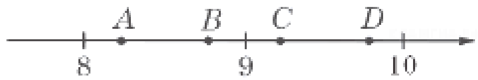
2) $y - x < 0$ - *неверно*,

3) $x^2y > 0$ - *верно*,

4) $x + y > 0$ - *верно*.

Правильный ответ указан под номером 2.

2. Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{77}$. Какая это точка?



1) точка *A* 2) точка *B* 3) точка *C* 4) точка

Решение. Возведём в квадрат числа $\sqrt{77}$, 8, 9, 10:

$$\sqrt{77}^2 = 77, \quad 8^2 = 64, \quad 9^2 = 81, \quad 10^2 = 100.$$

Число 77 лежит между числами 64 и 81 и находится ближе к числу 81, поэтому $\sqrt{77}$ соответствует точке *B*.

Правильный ответ указан под номером 2.

3. Известно, что $a > b$. Какое из указанных утверждений неверно?

1) $2a > 2b$
2) $2 + a > 2 + b$
3) $2 - b < 2 - a$
4) $a - b > 0$

Решение. Рассмотрим все варианты ответа:

1) $2a > 2b \Leftrightarrow 2a - 2b > 0 \Leftrightarrow 2(a - b) > 0$ — верно, поскольку $a > b$,

2) $2 + a > 2 + b \Leftrightarrow a > 2 + b - 2 \Leftrightarrow a > b$— верно,

3) $2 - b < 2 - a \Leftrightarrow 2 + a < 2 + b$— неверно,

4) $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$— верно.

Правильный ответ указан под номером 3.

Задание №3

Третье задание экзаменационной работы помимо умений выполнять вычисления и преобразования, также проверяет умение выполнять преобразования алгебраических выражений. Для успешного выполнения данного задания учащимся необходимо понимать, что подразумевается под буквенным выражением и его числовым значением, что такое допустимые значения переменных, уметь преобразовывать выражения с помощью формул сокращенного умножения, работать с многочленами, степенями с целым показателем, квадратными корнями. К концу 8-го класса у учащихся набирается необходимый багаж знаний и умений для решения заданий данного типа.

Примеры заданий:

1. Значение какого из выражений является числом рациональным?

1) $(\sqrt{6}-3)(\sqrt{6}+3)$

2) $\frac{(\sqrt{5})^2}{\sqrt{10}}$

3) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$

4) $(\sqrt{6}-3)^2$

Решение. Упростим каждое выражение.

1) $(\sqrt{6} - 3)(\sqrt{6} + 3) = 6 - 9 = -3.$

2) $\frac{(\sqrt{5})^2}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = 0{,}5\sqrt{10}.$

3) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}.$

4) $(\sqrt{6}-3)^2 = 15-6\sqrt{6}+3 = 18-6\sqrt{6}$.

Рациональным является значение первого выражения.

2. В какое из следующих выражений можно преобразовать дробь $\frac{(a^{-3})^4}{a^{-6}}$?

1) a^{-18} 2) a^{-2} 3) a^{7} 4) a^{-6}

Решение. Упростим дробь:

$$\frac{(a^{-3})^4}{a^{-6}} = a^{(-3)\cdot 4-(-6)} = a^{-6}.$$

Правильный ответ указан под номером 4.

3. Сравните числа $\sqrt{67}+\sqrt{61}$ и 16.

1) $\sqrt{67}+\sqrt{61} < 16$

2) $\sqrt{67}+\sqrt{61} = 16$

3) $\sqrt{67}+\sqrt{61} > 16$

Решение. В силу цепочки неравенств $\sqrt{67}+\sqrt{61} < 16 \Leftrightarrow (\sqrt{67}+\sqrt{61})^2 < 256 \Leftrightarrow 67+2\sqrt{67\cdot 61}+61 < 256 \Leftrightarrow \sqrt{67\cdot 61} < 64 \Leftrightarrow 4087 < 4096$ первое число меньше второго.

Правильный ответ указан под номером 1.

Задание №4

Умение решать уравнения, неравенства и их системы проверяется в четвертом задании экзаменационной работы. От учащихся требуются навыки решения линейных, рациональных, квадратных уравнений, уравнений высших степеней, а также умения решать линейные и квадратные неравенства, их системы. Решение различных уравнений и неравенств проходится в конце 8-

го класса, а также в первом полугодии 9-го класса эти знания обобщаются и систематизируются.

Примеры заданий:

1. Найдите корни уравнения $2x^2+14x=0$.

Если корней несколько, запишите их через точку с запятой в порядке возрастания.

Решение. Разложим на множители левую часть уравнения:

$$2x^2+14x=0 \Leftrightarrow x(2x+14)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ 2x+14=0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-7. \end{array}\right.$$

Ответ: -7; 0.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x-2y=2, \\ 2x+y=5. \end{cases}$$

Решение. Разделим обе части первого уравнения на 2 и решим систему методом подстановки:

$$\begin{cases} 4x-2y=2, \\ 2x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=1, \\ 2x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-1, \\ 2x+2x-1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-1, \\ 4x=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2, \\ x=1,5. \end{cases}$$

Ответ: $(1,5;2)$.

3. Решите уравнение $\frac{5x+4}{2}+3=\frac{9x}{4}$

Решение. Умножим левую и правую часть уравнения на 4, получаем: $10x+8+12=9x \Leftrightarrow x=-20$

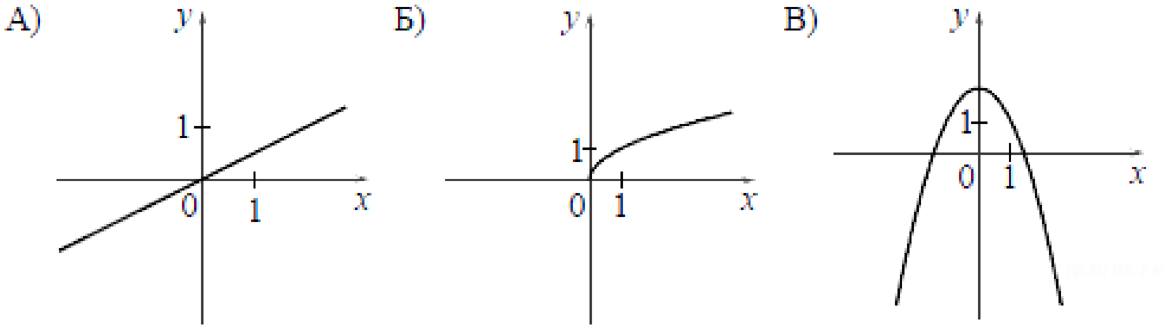
Ответ: -20.

Задание №5

В пятом задании экзаменационной работы проверяется умение учащихся работать с графиками функций. Для этого нужно понимать, что такое функция, область определения функции, возрастание и убывание функции, наибольшее и наименьшее значения функции, нули функции, промежутки знакопостоянства. Учащиеся должны знать, как выглядит график линейной функции, обратной пропорциональной зависимости, квадратичной функции, $y = \sqrt{x}, y = |x|$, а также уметь использовать эти графики для решения уравнений и систем. Всё это посильно для восьмиклассников.

Примеры заданий:

1. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.



1) $y = \frac{1}{x}$

2) $y = \frac{1}{2}x$

3) $y = 2 - x^2$

4) $y = \sqrt{x}$

Ответ укажите в виде последовательности цифр без пробелов и запятых в указанном порядке

А	Б	В

Решение. Определим вид графика каждой из функций.

1) $y = \frac{1}{x}$ - уравнение гиперболы,

2) $y = \frac{1}{2}x$ - уравнение прямой,

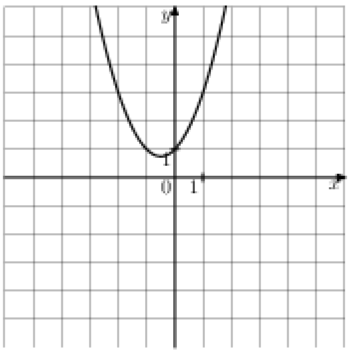
3) $y = 2 - x^2$ - уравнение параболы с вертикальным расположением веток,

4) $y = \sqrt{x}$ - уравнение верхней ветви параболы, направленной вправо.

Тем самым найдено соответствие: А — 2, Б — 4, В — 3.

Ответ: 243.

2. Найдите значение а по графику функции $y = ax^2 + bx + c$, изображенному на рисунке.



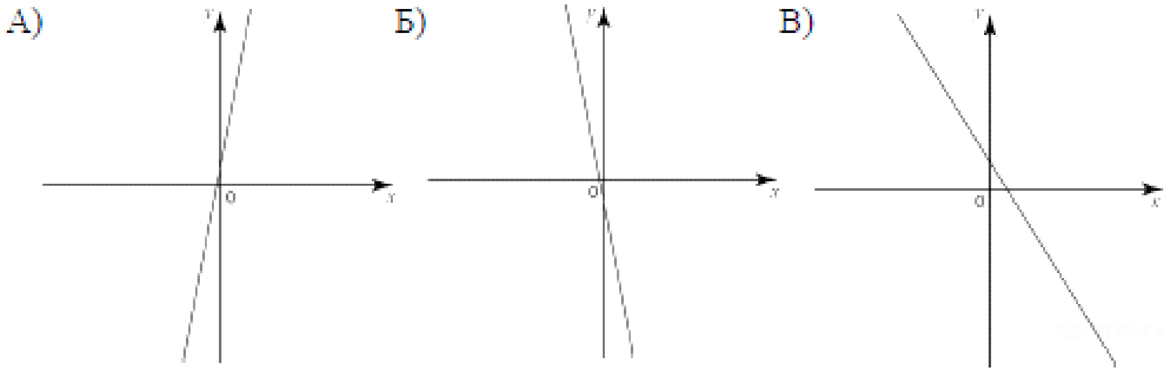
Решение. Парабола пересекает ось ординат в точке с ординатой 1, поэтому с=1. Тем самым, уравнение параболы принимает вид $y = ax^2 + bx + 1$ Парабола проходит через точки (1; 3) и (−2; 3). Отсюда имеем:

$$\begin{cases} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 1 = 3, \\ a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2, \\ 2a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 1. \end{cases}$$

Ответ: а=1.

3. На рисунке изображены графики функций вида $y = kx + b$. Установите соответствие между графиками и знаками коэффициентов k и b.

ГРАФИКИ



КОЭФФИЦИЕНТЫ

1) $k<0, b<0$

3) $k>0, b<0$

2) $k>0, b>0$

4) $k<0, b>0$

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В

Решение. Если значение функции возрастает с увеличением x, то коэффициент k положителен, если убывает — отрицателен. Значение b соответствует значению функции в точке $x = 0$, следовательно, если график пересекает ось ординат выше оси абсцисс, то значение b положительно, если ниже оси абсцисс — отрицательно. Таким образом, графикам соответствуют следующие коэффициенты: А — 2, Б — 1, В — 4.

Ответ: 214.

Задание №6

Шестое задание экзаменационной работы посвящено числовым последовательностям, в частности арифметической и геометрической прогрессиям. С числовыми последовательностями дети знакомятся еще в начальной школе, но на этом их внимание не акцентируется. В 9 классе учащиеся изучают понятие последовательности, учатся работать с прогрессиями, выводят основные формулы и отрабатывают их на конкретных примерах. При успешном изучении этой темы, трудностей с решением этого задания экзаменационной работы быть не должно.

<u>Примеры заданий:</u>

1. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями:$b_1 = 4, b_{n+1} = 2b_n$. Найдите b_7.

Решение. Определим знаменатель геометрической прогрессии:$q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2b_n}{b_n} = 2$. Член геометрической прогрессии с номером k может быть найден по формуле$b_k = b_1 \cdot q^{k-1}$. Конкретно в нашей задаче имеем: $b_7 = b_1 \cdot q^{7-1} = 256$.

Ответ: 256.

2. Дана арифметическая прогрессия $(a_n) = -6; -3; 0; \ldots$ Найдите сумму первых десяти её членов.

Решение. Определим разность арифметической прогрессии: $d = a_2 - a_1 = -3 - (-6) = 3$. Сумма первых k-ых членов может быть найдена по формуле $S_k = \frac{2a_1 + + d(k-1)}{2} k$. Применимо к нашему случаю: $S_{10} = \frac{2(-6)+9\cdot 3}{2} \cdot 10 = 75$.

Ответ: 75.

3. Последовательность задана формулой $c_n = n + \frac{(-1)^n}{n}$. Какое из следующих чисел не является членом этой последовательности?

1) $2\frac{1}{2}$ 2) $4\frac{1}{4}$ 3) $5\frac{1}{5}$ 4) $6\frac{1}{6}$

Решение. Рассмотрим несколько первых членов последовательности, начиная с n=2:

$$n=2: \quad c_2 = 2 + \frac{(-1)^2}{2} = 2\frac{1}{2}, \qquad n=5: \quad c_5 = 5 + \frac{(-1)^5}{5} = 4\frac{4}{5},$$

$$n=3: \quad c_3 = 3 + \frac{(-1)^3}{3} = 2\frac{2}{3}, \qquad n=6: \quad c_6 = 6 + \frac{(-1)^6}{6} = 6\frac{1}{6},$$

$$n=4: \quad c_4 = 4 + \frac{(-1)^4}{4} = 4\frac{1}{4},$$

Тем самым, число $5\frac{1}{5}$ не членом этой последовательности.

Ответ: 3.

Задание №7

Умение преобразовывать алгебраические выражения проверятся в седьмом задании экзаменационной работы. Учащиеся должны владеть приемами работы с буквенными выражениями, многочленами и алгебраическими дробями, что отрабатывается на протяжении всего курса изучения математики, но в основном в 7-8 классах.

Примеры заданий:

1. Упростите выражение $(a-3)^2 - a(5a-6)$, найдите его значение при $a = -0{,}5$. В ответ запишите полученное число.

Решение. Упростим выражение: $(a-3)^2 - a(5a-6) = a^2 - 6a + 9 - 5a^2 + 6a = -4a^2 + 9$. Найдём значение выражения при $a = -0{,}5 : -4(-0{,}5)^2 + 9 = -4 \cdot \frac{1}{4} + 9 = 8.$

Ответ: 8.

2. Найдите значение выражения $\frac{64b^2+128b+64}{b} : \left(\frac{4}{b} + 4\right)$ при $b = -\frac{15}{16}$

Решение. Упростим выражение: $\frac{64b^2+128b+64}{b} : \left(\frac{4}{b} + 4\right) = \frac{64(b+1)^2}{4(b+1)} = 16(b+1).$ При $b = -\frac{15}{16}$ имеем $16\left(-\frac{15}{16} + 1\right) = 16 \cdot \frac{1}{16} = 1.$

Ответ: 1.

3. Сократите дробь $\frac{(5x+3)^2-(5x-3)^2}{x}$.

Решение. Сократим дробь: $\frac{(5x+3)^2-(5x-3)^2}{x} = \frac{(5x+3-5x+3)(5x+3+5x-3)}{x} = \frac{60x}{x} = 60$

Ответ: 60.

Задание №8

Задание №8 экзаменационной работы посвящено решению неравенств. Данное задание проверяет, усвоили ли учащиеся приемы решения линейных, квадратных и рациональных неравенств, и могут ли они интерпретировать результаты своего решения. Большая доля изучения этой темы приходится на конец 8-го класса, а также на начало 9-го класса, где знания систематизируются и обобщаются.

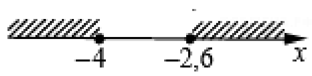
Примеры заданий:

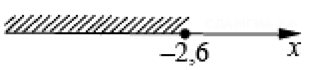
1. Решите систему неравенств $\begin{cases} 5x+13 \le 0, \\ x+5 \ge 1. \end{cases}$

На каком рисунке изображено множество её решений?

1) 

2) 

3) 

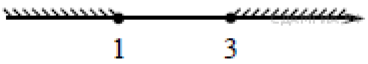
4) 

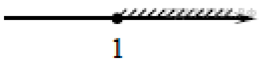
Решение. Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} 5x+13 \le 0, \\ x+5 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -2,6, \\ x \ge -4, \end{cases} \Leftrightarrow -4 \le x \le -2,6.$$

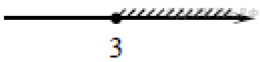
Решение неравенства изображено под номером 2.

2. На каком рисунке изображено множество решений неравенства $x^2 - 4x + 3 \geq 0$?

1) 

2) 

3) 

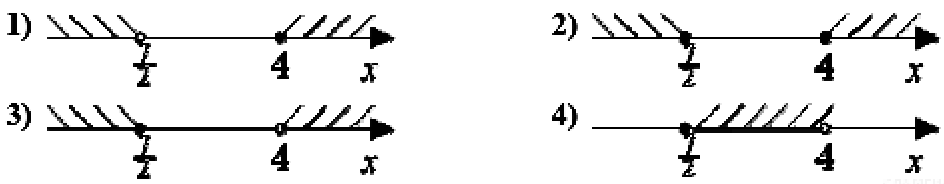
4) 

Решение. Решим неравенство: $x^2 - 4x + 3 \geq 0$. Корнями уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$ являются числа 1 и 3. Поэтому

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3, \\ x \leq 1. \end{array}\right.$$

Множество решений неравенства изображено на рис. 1. Правильный ответ указан под номером 1.

3. На каком рисунке изображено множество решений неравенства $\frac{2x-7}{4-x} \geq 0$



1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

Решение. Решим неравенство:

$$\frac{2x-7}{4-x} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-7 \geq 0, \\ 4-x > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-7 \leq 0, \\ 4-x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq \dfrac{7}{2}, \\ x < 4, \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq \dfrac{7}{2}, \\ x > 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{7}{2} \leq x < 4.$$

Множество решений неравенства изображено на рис. 4. Правильный ответ указан под номером 4.

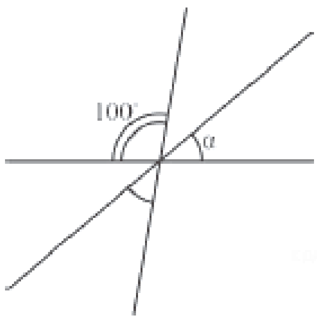
Модуль «Геометрия»

Задание №9

Девятое задание – первое, которое открывает новый раздел «Геометрия». В данном задании учащимся предлагает найти градусные меры углов в различных фигурах или использовать их для вычисления сторон различных фигур. Можно сказать, что решение данного типа задач нельзя отнести конкретно к какому-либо классу, потому что находить градусные меры углов дети учатся и в 7, и в 8, классе, опираясь на разные определения, свойства и теоремы.

Ученикам 7-го класса будут посильны задания вот такого типа:

1. Углы, отмеченные на рисунке одной дугой, равны. Найдите угол α. Ответ дайте в градусах.

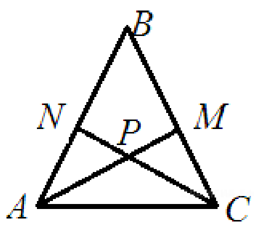


Решение. Углы 1 и 2 равны как вертикальные, поэтому

$$100^\circ + 2\alpha = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha = 40^\circ.$$

Ответ: 40.

2. В равностороннем треугольнике *ABC* биссектрисы *CN* и *AM* пересекаются в точке *P*. Найдите $\angle MPN$.



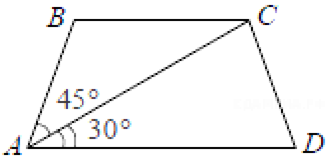
Решение. В равностороннем треугольнике *ABC* все углы равны 60°. Биссектрисы *CN* и *AM* делят углы пополам, поэтому $\angle ACN = \angle MAC = 60^\circ : 2 = 30^\circ$.

Сумма углов в треугольнике равна 180°, поэтому $\angle APC = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$. Вертикальные углы равны, следовательно, $\angle MPN = \angle APC = 120^\circ$.

Ответ: 120.

В 8-ом классе учащиеся уже научатся решать задания вот такого уровня:

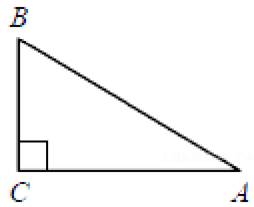
1. Найдите больший угол равнобедренной трапеции $ABCD$, если диагональ AC образует с основанием AD и боковой стороной ABуглы, равные 30° и 45° соответственно.



Решение. Углы A и B — односторонние, поэтому угол B равен 180° − 45° − 30° = 105°.

Ответ: 105.

2. В треугольнике ABC угол C прямой, $BC = 8$, $\sin A = 0{,}4$. Найдите AB.



Решение. Синус угла равен отношению противолежащего катета BC к гипотенузе AB. Поэтому:

$$AB = \frac{BC}{\sin A} = \frac{8}{0{,}4} = 20.$$

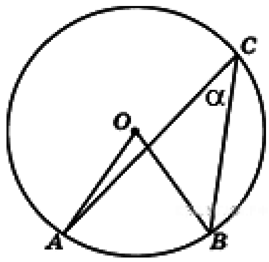
Ответ: 20.

Задание №10

Вписанная и описанная окружность, центральный и вписанный угол, касательная и секущая – вот те понятия, которыми должны владеть учащиеся для успешного решения десятого задания экзаменационной работы. Оно полностью посвящено окружности и ее элементам. Помимо знания основных определений, учащиеся должны помнить о теоремах, которые связывают окружность с касательной, вписанными и описанными углами. Данные темы рассматриваются в школьном курсе геометрии в конце 8-го класса.

Примеры заданий:

1. Найдите величину (в градусах) вписанного угла α, опирающегося на хорду AB, равную радиусу окружности.

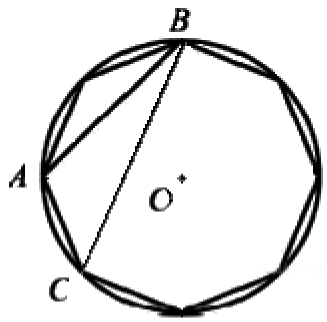


Решение. Проведем радиусы OA и OB. Так как по условию задачи хорда AB равна радиусу, то треугольник AOB — равносторонний. Угол AOB — центральный и равен $60°$. Угол ACB — вписанный и опирается на ту же дугу, что и угол AOB. Таким образом, получаем:

$$\angle ACB = \frac{1}{2}AOB = 30°.$$

Ответ: 30.

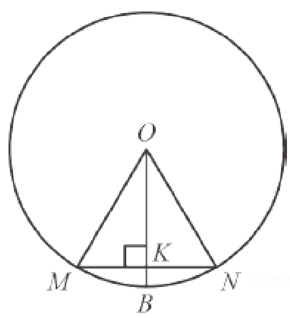
В окружность вписан равносторонний восьмиугольник. Найдите величину угла ABC.



Решение. Построим OA и OC радиусы. Центральный угол AOC равен 360°:8 = 45°. Угол ABC — вписанный и опирается на ту же дугу, поэтому он равен 45°:2 = 22,5°.

Ответ: 22,5.

3. Радиус OB окружности с центром в точке Oпересекает хорду MN в её середине — точке K. Найдите длину хорды MN, если KB = 1 см, а радиус окружности равен 13 см.



Решение. Найдем отрезок OK: $OK = OB - KB = 13 - 1 = 12$. Так как OB перпендикулярен MN, треугольник MOK — прямоугольный. По теореме Пифагора имеем:

$$MK = \sqrt{MO^2 - OK^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$$

Треугольник MON — равнобедренный так как $MO = ON = r$, тогда $MK = KN$. Таким образом, $MN = MK \cdot 2 = 10$.

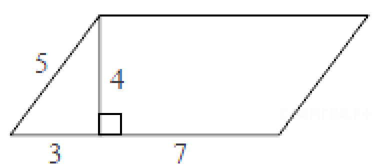
Ответ: 10.

Задание №11

Учащиеся должны уметь находить площади различных фигур, что проверяется в одиннадцатом задании ОГЭ. Первые формулы для нахождения таких фигур, как прямоугольник и квадрат, дети получают еще в начальной школе. Первое знакомство с формулами для нахождения площади круга происходит в 6 классе на математике. В 8-ом классе на уроках геометрии список формул расширяется, а в 9-ом при изучении соотношений в треугольнике и правильных фигур учащиеся окончательно расширяют список формул, что позволяет им успешно справится с данным заданием в ОГЭ.

Примеры заданий:

1. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.



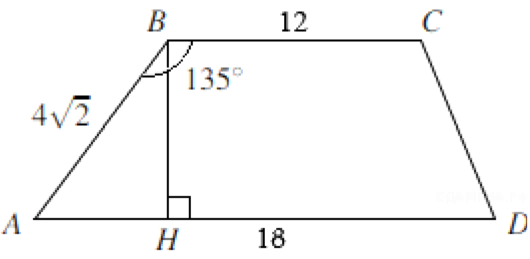
Решение. Площадь параллелограмма равна произведению длины основания на высоту:

$$S = (3 + 7) \cdot 4 = 40.$$

Ответ: 40.

2. Основания трапеции равны 18 и 12, одна из боковых сторон равна $4\sqrt{2}$, а угол между ней и одним из оснований равен 135°. Найдите площадь трапеции.

Решение. Пусть дана трапеция $ABCD$, где $AD = 18$, $BC = 12$, $AB = 4\sqrt{2}$, а $\angle ABC = 135°$. Опустим перпендикуляр BH на сторону AD. Угол ABH равен: $135° - 90° = 45°$.



Таким образом треугольник ABH является прямоугольным и равнобедренным. Найдем высоту BH:

$$BH = AB \cdot \cos 45^\circ = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4.$$

Площадь трапеции равна полусумме оснований на высоту:

$$S = \frac{18+12}{2} \cdot 4 = 60.$$

Ответ: 60.

Найдите площадь кругового сектора, если длина ограничивающей его дуги равна 6π, а угол сектора равен 120°. В ответе укажите площадь, *деленную на* π.

Решение. Найдем радиус сектора из формулы длины дуги:

$$L = \frac{\pi r}{180} \cdot \alpha \Leftrightarrow r = \frac{L \cdot 180}{\alpha \cdot \pi} = 9.$$

Площадь сектора равна:

$$\frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot 81}{360} \cdot 120 = 27\pi.$$

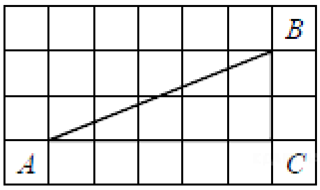
Ответ: 27.

Задание №12

Данное задание предлагает учащимся поработать с фигурами на клетчатой решетке. Формулировка задний может быть разной. Чаще всего встречаются задания, где необходимо определить синус, косинус, тангенс или котангенс некоторого угла. Чуть реже встречаются задания, где нужно определить площади некоторых фигур (преимущественно треугольника), конкретные стороны и расстояние от точки до прямой, между прямыми, использовать метод координат. Координатный метод и оотношения в треугольнике вплотную изучаются в курсе геометрии 9-го класса.

Примеры заданий:

1. Найдите тангенс угла A треугольника ABC, изображённого на рисунке.

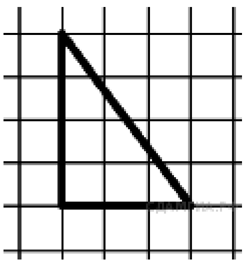


Решение. Тангенс угла в прямоугольном треугольнике — отношение противолежащего катета к прилежащему:

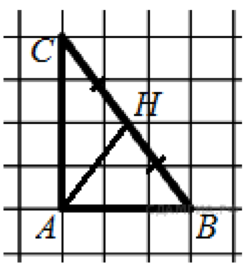
$$tg\,\angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

Ответ: 0,4.

2. На рисунке изображён прямоугольный треугольник. Найдите длину медианы треугольника, проведённую из вершины прямого угла.



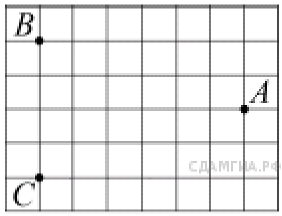
Решение. Введем обозначения как показано на рисунке и проведём медиану треугольника AH. В прямоугольном треугольнике ABC длины катетов равны 3 и 4, поэтому гипотенуза равна $\sqrt{4^2+3^2} = 5$. В прямоугольном



треугольнике медиана равна половине гипотенузы, т. е. 5 : 2 = 2,5.

Ответ: 2,5.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см отмечены точки A,B и C. Найдите расстояние от точки A до середины отрезка BC. Ответ выразите в сантиметрах.



Решение. Расстояние от точки A до середины отрезка BC равно шести сторонам клетки, или 6 см.

Ответ: 6.

Задание №13

Заключительное задание первой части модуля «Геометрия» предполагает анализ утверждений, оценку логической правильности суждений, распознавание ошибочных утверждений. Анализируя предлагаемые утверждения, учащимся не всегда будет достаточно знать только определения. Иногда некоторые факты представляют собой небольшое доказательство, в ходе которого и устанавливается правильность утверждения. Данное задание нельзя отнести к конкретной теме, которую изучают в том или ином классе, т.к. утверждения охватывают различные области изучения геометрии.

Примеры заданий:

1. Укажите номера неверных утверждений.

1) Диаметр делит окружность на две равные дуги.

2) Параллелограмм имеет две оси симметрии.

3) Площадь треугольника равна его основанию, умноженному на высоту.

Если утверждений несколько, запишите их через точку с запятой в порядке возрастания.

Решение. Проверим каждое из утверждений.

1) «Диаметр делит окружность на две равные дуги» — *верно*, по свойству диаметра.

2) «Параллелограмм имеет две оси симметрии» — *верно*, и эти оси совпадают с диагоналями параллелограмма.

3) «Площадь треугольника равна его основанию, умноженному на высоту» — *верно*, по свойству треугольника.

Ответ: 1;2;3.

2. Какие из следующих утверждений верны?

1) Если площади фигур равны, то равны и сами фигуры.

2) Площадь трапеции равна произведению суммы оснований на высоту.

3) Если две стороны треугольника равны 4 и 5, а угол между ними равен 30°, то площадь этого треугольника равна 10.

4) Если две смежные стороны параллелограмма равны 4 и 5, а угол между ними равен 30°, то площадь этого параллелограмма равна 10.

Если утверждений несколько, запишите их через точку с запятой в порядке возрастания.

Решение. Проверим каждое из утверждений.

1) «Если площади фигур равны, то равны и сами фигуры.» — *неверно*, фигуры, у которых равны площади называются равновеликими, но не равными.

2) «Площадь трапеции равна произведению суммы оснований на высоту.» — *неверно*, площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

3) «Если две стороны треугольника равны 4 и 5, а угол между ними равен 30°, то площадь этого треугольника равна 10.» — *неверно*, площадь треугольника равна $\frac{1}{2}a \cdot b \cdot sin\alpha$.

4) «Если две смежные стороны параллелограмма равны 4 и 5, а угол между ними равен 30°, то площадь этого параллелограмма равна 10.» — *верно*, площадь параллелограмма равна $a \cdot b \cdot sin\alpha$.

Ответ: 4.

Модуль «Реальная математика»

Задание №14

Четырнадцатое задание – анализ таблиц. Учащиеся должны уметь пользоваться основными единицами массы, длинны, времени, скорости, площади и объема, выражать более крупные единицы через мелкие и наоборот. Такое задание посильно ученикам 5-6 классов.

Примеры заданий:

1. В таблице представлены налоговые ставки на автомобили в Москве с 1 января 2013 года.

Мощность автомобиля (в л. с.*)	Налоговая ставка (в руб. за л. с. в год)
не более 70	0
71–100	12
101–125	25
126–150	35
151–175	45
176–200	50
201–225	65
226–250	75
свыше 250	150

*л. с. − лошадиная сила

Сколько рублей должен заплатить владелец автомобиля мощностью 162 л. с. в качестве налога за один год?

1) 45

2) 50

3) 7290

4) 6750

Решение. При мощности автомобиля в 162 л. с. он попадает в диапазон от 151—175 л. с., т. е. налоговая ставка составит 45 руб за л. с. в год.

Значит налог к уплате составит $162 \cdot 45 = 7290$.

Правильный ответ указан под номером 3.

2. Бабушка, живущая в Краснодаре, отправила 1 сентября четыре посылки своим внукам, живущим в разных городах России. В таблице дано контрольное время в сутках, установленное для пересылки посылок наземным транспортом (без учёта дня приёма) между некоторыми городами России.

Пункт отправки	Пункт назначения				
	Архангельск	Астрахань	Барнаул	Белгород	Краснодар
Архангельск		9	12	7	10
Астрахань	9		11	8	8
Барнаул	12	11		11	12
Белгород	8	8	13		9
Краснодар	10	9	14	9	

Какая из данных посылок не была доставлена вовремя?

1) пункт назначения — Белгород, посылка доставлена 10 сентября
2) пункт назначения — Астрахань, посылка доставлена 12 сентября
3) пункт назначения — Барнаул, посылка доставлена 15 сентября
4) пункт назначения — Архангельск, посылка доставлена 11 сентября

Решение. Определим по таблице контрольное время для пересылки всех четырех посылок и сравним его с временем, которое посылка шла фактически:

1) Из Краснодара в Белгород: контрольное время 9 дней, шла 9 дней — доставлена вовремя;

2) Из Краснодара в Астрахань: контрольное время 9 дней, шла 11 дней — доставлена не вовремя;

3) Из Краснодара в Барнаул: контрольное время 14 дней, шла 14 дней — доставлена вовремя;

4) Из Краснодара в Архангельск: контрольное время 10 дней, шла 10 дней — доставлена вовремя.

Правильный ответ указан под номером 2.

Задание №15

В пятнадцатом задании экзаменационной работы проверяется умение учащихся работать с графиками, интерпретировать результаты работы с ними, описывать с помощью графиков различные реальные зависимости. Работа с графиками, таблицами и диаграммами не явно выделена в учебниках 5-6 классов, но некоторые задания на отработку в них есть. Поэтому шестиклассник может самостоятельно справится с этим заданием.

Примеры заданий:

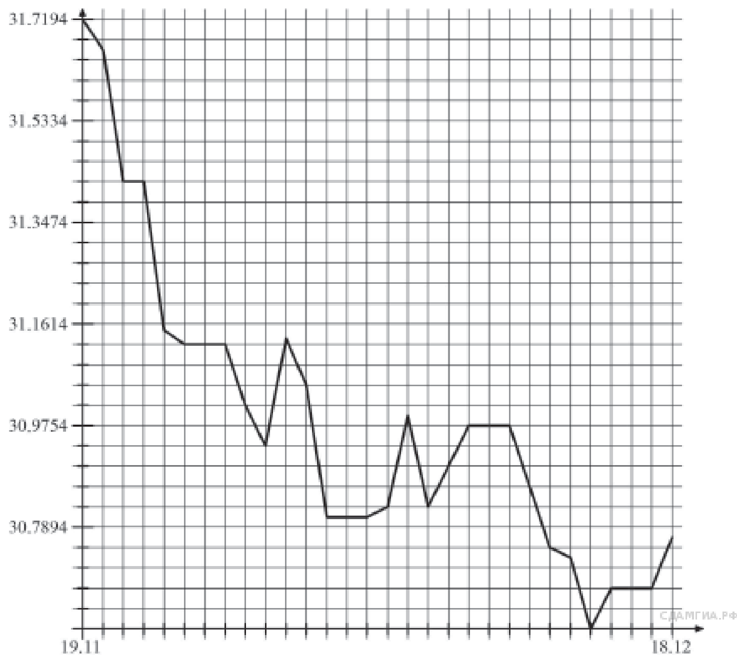
1. На рисунке изображён график изменения атмосферного давления в городе Энске за три дня. По горизонтали указаны дни недели, по вертикали — значения атмосферного давления в миллиметрах ртутного столба. Укажите наибольшее значение атмосферного давления во вторник.

Решение. Цена деления шкалы давления: 1 мм рт. ст. Минимальное значение давления p_{min} во вторник равно 754 мм рт. ст. плюс половина цены деления шкалы давления: $p_{min} = 754 + 1 = 755$

Ответ: 755.

2. На графике представлена динамика изменения курса доллара США в рублю за период с 19 ноября по 19 декабря. По горизонтальной оси отложены даты,

по вертикальной — значения доллара США. Шаг по вертикальной оси равен 0,0372 руб. Определите по графику, каким был курс доллара США к рублю 21 ноября.



Решение. По графику видно, что 21 ноября курс доллара США к рублю был равен 31,4218.

Ответ: 31,4218.

3. В таблице приведены результаты двух полуфинальных забегов на дистанцию 60 м. В финальном забеге 6 участников. Из каждого полуфинала в финал выходят два спортсмена, показавших первый и второй результаты. К ним добавляют еще двух спортсменов, показавших лучшее время среди всех остальных участников полуфиналов.

	Полуфинал 1				Полуфинал 2			
Номер спортсмена	1	2	3	4	5	6	7	8
Время, с	6,93	6,98	7,03	6,89	7,02	6,97	7,01	7,08
Место в забеге								

Запишите в ответ номера спортсменов, не попавших в финал.

Решение. В полуфинале 1, лучшее время у спортсмена №4 и у спортсмена №1, таким образом, они выходят в финал. В полуфинале 2, лучшее время у спортсмена №6 и у спортсмена №7 таким образом, они также выходят в финал. Лучшее время из оставшихся спортсменов у спортсмена №2 и №5. таким образом таким образом, они тоже выходят в финал. Таким образом, в финал не попали спортсмены под номерами 3 и 8.

Задание №16

Решать несложные практические расчетные задачи, задачи, связанные с отношением, пропорциональностью величин, дробями, процентами, пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах, интерпретировать с учетом реальных ограничений – все то, что предстоит сделать учащимся в шестнадцатом задании работы. Основные навыки для решения таких задач формируются в 5-6 классах.

Примеры заданий:

1. На молочном заводе пакеты молока упаковываются по 15 штук в коробку, причём в каждой коробке все пакеты одинаковые. В партии молока, отправляемой в магазин «Уголок», коробок с полуторалитровыми пакетами молока вдвое меньше, чем коробок с литровыми пакетами. Сколько литров молока в этой партии, если коробок с литровыми пакетами молока 32?

Решение. Найдём количество коробок с полуторалитровыми пакетами молока: $32 : 2 = 16$. Теперь рассчитаем количество литров молока в этой партии: $32 \cdot 15 \cdot 1 + 16 \cdot 15 \cdot 1{,}5 = 840$ л.

Ответ: 840.

2. Черешня стоит 150 рублей за килограмм, а виноград — 160 рублей за килограмм. На сколько процентов черешня дешевле винограда?

Решение. Черешня дешевле винограда на $160 - 150 = 10$ рублей. Разделим 10 на 160:

$10:160 = 0{,}062$. Значит, виноград дешевле малины на 6,25%.

Ответ: 6,25.

3. Пылесос, который стоил 3500 рублей, продаётся с 10%-й скидкой. При покупке этого пылесоса покупатель отдал кассиру 5000 рублей. Сколько рублей сдачи он должен получить?

Решение. Стоимость пылесоса равна $3500 - 0{,}1 \cdot 3500 = 3150$ руб. Значит, сдача с 5000 рублей составит 1850 рублей.

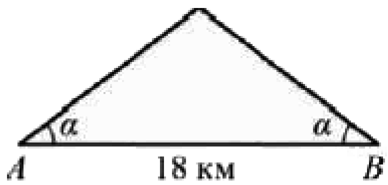
Ответ: 1850.

Задание №17

В данном задании ОГЭ учащиеся должны уметь описывать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин. Чаще всего в данном задании встречаются задачи на применение признаков подобия треугольника, теоремы Пифагора, теорем о соотношениях в треугольнике. В зависимости от самого задания оно может быть посильно как восьми-, так и девятиклассникам.

<u>Примеры заданий:</u>

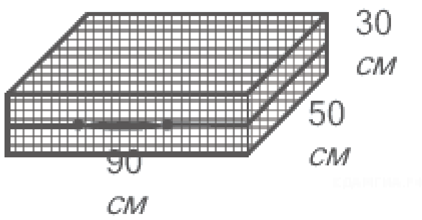
1. Склоны горы образуют с горизонтом угол α, косинус которого равен 0,9. Расстояние по карте между точками A и B равно 18 км. Определите длину пути между этими точками через вершину горы.



Решение. Гора имеет форму равнобедренного треугольника. Пусть x км — длина склона горы. Тогда $\cos\alpha = \frac{AB}{2x}$ откуда $\frac{9}{10} = \frac{9}{x} \Leftrightarrow x = 10$. Таким образом, путь через вершину горы равен 20 км.

Ответ: 20.

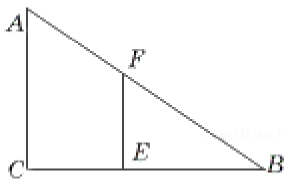
2. Дизайнер Павел получил заказ на декорирование чемодана цветной бумагой. По рисунку определите, сколько бумаги (в см^2) необходимо закупить Павлу, чтобы оклеить всю внешнюю поверхность чемодана, если каждую грань он будет обклеивать отдельно (без загибов).



Решение. Найдем площади всех деталей, которые необходимо обклеить: $30 \cdot 50 = 1500$ см^2; $30 \cdot 90 = 2700$ см^2; $90 \cdot 50 = 4500$ см^2. Так как чемодан имеет по две одинаковых детали, вся площадь, которую необходимо обклеить равна $3000 + 5400 + 9000 = 17400$ (см^2).

Ответ: 17400.

3. Человек ростом 1,7 м стоит на расстоянии 8 шагов от столба, на котором висит фонарь. Тень человека равна четырем шагам. На какой высоте (в метрах) расположен фонарь?



Решение. Столб и человек образуют два прямоугольных треугольниках ABC и FEB. Эти треугольники подобны по двум углам. Пусть высота фонаря равна x м, тогда $\frac{AC}{FE} = \frac{BC}{BE}$, откуда $\frac{x}{1{,}7} = \frac{12}{4} \Leftrightarrow x = 5{,}1$ м. Поэтому фонарь расположен на высоте 5,1 м.

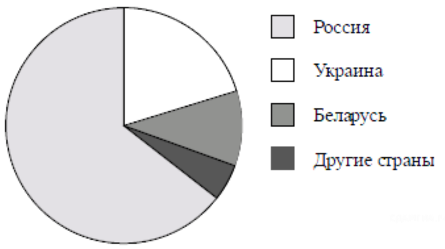
Ответ: 5,1

Задание №18

В восемнадцатом задании ОГЭ учащимся предлагается проанализировать числовые данные, представленные в таблицах, на диаграммах, графикам. Также это задание посильно ученикам 5-6 классов.

<u>Примеры заданий:</u>

1. На диаграмме представлено распределение количества пользователей некоторой социальной сети по странам мира. Всего в этой социальной сети 9 млн пользователей.



Какое из следующих утверждений **неверно**?

1) Пользователей из России больше, чем пользователей с Украины.

2) Пользователей из Белоруссии больше, чем пользователей из Швеции.

3) Больше трети пользователей сети — из Украины.

4) Пользователей из России больше 4 миллионов.

В ответ запишите номер этого утверждения.

Решение. Проанализируем все утверждения.

1) Пользователей из России больше всех, тем самым, их больше чем пользователей из Украины.

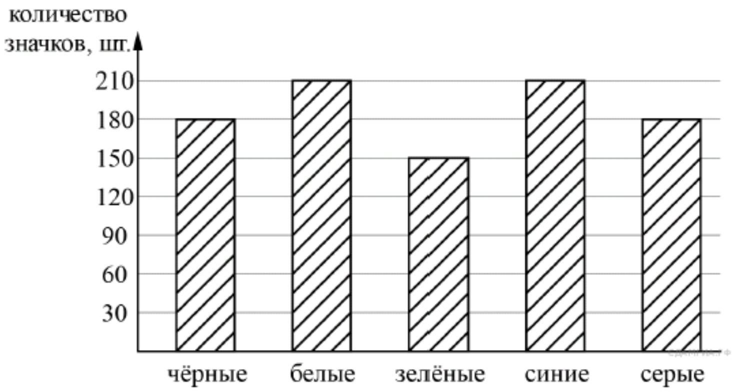
2) Сектор «Беларусь» занимает большую площадь диаграммы, чем сектор «Другие страны», а т. к. «Швеция» включена в «Другие страны» пользователей из Беларуси больше чем пользователей из Швеции.

3) Сектор в треть диаграммы имеет угол 360° : 3 = 120°. Угол сектора «Украина» меньше 90°, следовательно, меньше трети пользователей сети из Украины.

4) Пользователей из России больше половины всех пользователей, значит, больше 9 : 2 = 4,5 млн, а значит, больше 4 миллионов.

Ответ:3.

2. Рок-магазин продаёт значки с символикой рок-групп. В продаже имеются значки пяти цветов: чёрные, синие, зелёные, серые и белые. Данные о проданных значках представлены на столбчатой диаграмме.



Определите по диаграмме, значков какого цвета было продано меньше всего. Сколько примерно процентов от общего числа значков составляют значки этого цвета?

1) 5

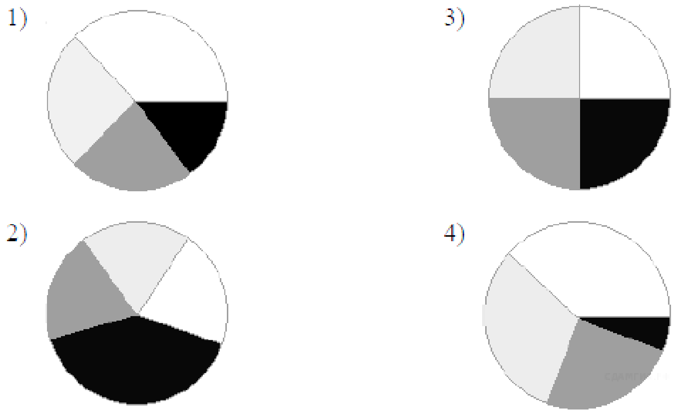
2) 10

3) 15

4) 20

Решение. Из диаграммы видно, что было продано меньше всего значков зелёного цвета в количестве 150 штук. Определим сколько процентов от общего числа составляют зелёные значки: $\frac{150}{180+210+150+210+180} = 0{,}161\ldots \approx 0{,}15.$ Значит зелёных значков примерно 15% от общего числа. Ответ: 3.

3. Какая из следующих круговых диаграмм показывает распределение оценок по контрольной работе по математике в 8-х классах школы, если из всех оценок в классе пятёрок примерно 35%, четвёрок — примерно 25%, а троек — примерно 23%?



Решение.

Из условия ясно, что количество двоек составляет 100 − 35 − 25 − 23 = 17 %. Третья круговая диаграмма не подходит, поскольку из неё следует, что количество всех оценок одинаково. Четвертая и вторая диаграммы не подходят, поскольку ни один из их фрагментов не составляет 17% от площади всего круга. Первая диаграмма показывает распределение оценок за контрольную.

Ответ 1.

Задание №19

В данном задании экзаменационной работы проверяется усвоение темы комбинаторика, основы теории вероятностей, математическая статистика. От учащихся требуется умение решать практические задачи, связанные с перебором вариантов, сравнивать шансы наступление случайных событий, оценивать вероятности, исследовать модели с использованием аппарата вероятности и статистики. С данным заданием может справится девятиклассник, т.к. эта тема изучается преимущественно в конце 9-го класса.

Примеры заданий:

1. В лыжных гонках участвуют 13 спортсменов из России, 2 спортсмена из Норвегии и 5 спортсменов из Швеции. Порядок, в котором спортсмены стартуют, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен не из России.

Решение. Вероятность благоприятного случая(N) — отношение количества благоприятных случаев к количеству всех случаев. В данной задаче благоприятным случаем является старт спортсмена не из России под номером 1. Всего благоприятных случаев 2 + 5 = 7, а количество всех случаев 13 + 2 + 5 = 20. Отношение соответственно равно $\frac{7}{20} = 0.35$.

Ответ: 0,35.

2. На каждые 1000 электрических лампочек приходится 5 бракованных. Какова вероятность купить исправную лампочку? *В ответе укажите результат, округленный до тысячных.*

Решение. На каждые 1000 лампочек приходится 5 бракованных, всего их 1005. Вероятность купить исправную лампочку будет равна доле исправных лампочек на каждые 1005 лампочек, то есть $\frac{1000}{1005} = \frac{200}{201} = 0.995$.

Ответ: 0,995.

3. Фирма «Вспышка» изготавливает фонарики. Вероятность того, что случайно выбранный фонарик из партии бракованный, равна 0,03. Какова вероятность того, что два случайно выбранных из одной партии фонарика окажутся небракованными?

Решение. Вероятность того, что один случайно выбранный из партии фонарик — небракованный, составляет $1 - 0{,}03 = 0{,}97$. Вероятность того, что мы выберем *одновременно* два небракованных фонарика равна $0{,}97 \cdot 0{,}97 = 0{,}9409$.

Задание №20

Завершающее тестовое задание предполагает осуществление практических расчетов по формулам, составление несложных формул, выражающих зависимости между величинами. Этому навыку учат на протяжении всего курса алгебры, но преимущественно в 5-7 классах.

Примеры заданий:

1. В фирме «Эх, прокачу!» стоимость поездки на такси (в рублях) рассчитывается по формуле $C = 150 + 11(t - 5)$, где t— длительность поездки, выраженная в минутах *(t>5)*. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость 15-минутной поездки.

Решение. Подставим в формулу значение переменной t: $C = 150 + 11(15 - 5) = 260$.

Ответ: 260.

2. Радиус описанной около треугольника окружности можно найти по формуле $R = \frac{a}{2sin\alpha}$, где a — сторона треугольника, α — противолежащий этой стороне угол, а R — радиус описанной около этого треугольника окружности. Пользуясь этой формулой, найдите $\sin\alpha$, если *a=0,6*, а *R=0,75*.

Решение. Выразим из формулы $\sin\alpha$: $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$. Подставляя, получаем: $\sin\alpha = \frac{0,6}{1.5} = 0,4$.

Ответ: 0,4.

Общие выводы по первой части

Общие выводы по первой части можно представить в виде таблицы, где номеру задания соответствует класс, учащийся которого может с ним справится.

№ задания	Класс	№ задания	Класс
1	5-6	11	8-9
2	8	12	9
3	8	13	9
4	8-9	14	-
5	8	15	-
6	9	16	5-6
7	7-8	17	8-9
8	8-9	18	5-6
9	7-8	19	9
10	8	20	5-7

§1.3. Вторая часть ОГЭ

Модуль «Алгебра»

Задание №21

Задание №21 проверяет умение учащихся выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения, неравенства и их системы, строить и читать графики функций. Основные умения для выполнения этого задания формируются к концу 8-го класса.

Примеры заданий:

1. Разложите на множители $2x^2 - 5xy - 3y^2$.

Решение. Имеем: $2x^2 - 5xy - 3y^2 = 2x^2 - 6xy + xy - 3y^2 = 2x(x - 3y) + y(x - 3y) = (x - 3y)(2x + y)$.
Ответ: $(x - 3y)(2x + y)$.

2. Какое из чисел больше: $\sqrt{6} + \sqrt{10}$ или $3 + \sqrt{7}$?

Решение. Найдем квадраты чисел: $\left(\sqrt{6} + \sqrt{10}\right)^2 = 16 + 2\sqrt{60} = 16 + \sqrt{240}$; $\left(3 + \sqrt{7}\right)^2 = 16 + 6\sqrt{7} = 16 + \sqrt{252}$. Так как $\sqrt{252} > \sqrt{240}$, то $\left(3 + \sqrt{7}\right)^2 > \left(\sqrt{6} + \sqrt{10}\right)^2$. Учитывая, что $\sqrt{6} + \sqrt{10}$ и $3 + \sqrt{7}$— положительные числа, получаем, что $3 + \sqrt{7} > \sqrt{6} + \sqrt{10}$. Ответ: $3 + \sqrt{7}$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 5x + y = -13 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$.

Решение. Из первого уравнения системы находим $y = -5x - 13$. Подставив полученное выражение во второе уравнение системы, получаем $25x^2 + 130x + 169 + x^2 = 13$; $x^2 + 5x + 6 = 0$, откуда находим $x = -3, x = -2$. Таким образом, решение исходной системы $(-3; 2), (-2; -3)$. Ответ: $(-3; 2), (-2; -3)$.

Задание №22

Задание №22 также проверяет умение учащихся выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения, неравенства и их системы, строить и читать графики функций, но может еще содержать текстовые задачи. Основные умения для выполнения этого задания также формируются к концу 8-го класса.

Примеры заданий:

1. На изготовление 231 детали ученик тратит на 11 часов больше, чем мастер на изготовление 462 таких же деталей. Известно, что ученик за час делает на 4 детали меньше, чем мастер. Сколько деталей в час делает ученик?

Решение. Предположим, что ученик делает x деталей в час. Тогда мастер делает $x+4$ детали в час. На изготовление 231 детали ученик потратит $\frac{231}{x}$ ч, а мастер тратит $\frac{462}{x+4}$ ч на изготовление 462 деталей. Составим уравнение по условию задачи: $\frac{231}{x} - \frac{462}{x+4} = 11.$

Решим уравнение: $\frac{21}{x} - \frac{42}{x+4} = 1;$ $\frac{21x+84-42x}{x(x+4)} = 1; 84 - 21x - x(x+4) = 0;$ $x^2 + 25x - 84 = 0$. Корни полученного квадратного уравнения: −28 и 3. Отбрасывая отрицательный корень, находим, что ученик делает в час 3 детали.

Ответ: 3.

2. Из пяти следующих утверждений о результатах матча хоккейных команд "Транспортир" и "Линейка" четыре истинны, а одно — ложно. Определите, с каким счетом закончился матч, и укажите победителя (если матч завершился победой одной из команд). Ответ обоснуйте.

1) Выиграл "Транспортир".

2) Всего в матче было заброшено менее 10 шайб.

3) Матч закончился вничью.

4) Всего в матче было заброшено более 8 шайб.

5) "Линейка" забросила более 3 шайб.

Решение. Предположим, что утверждение (3) истинно. Тогда утверждение (1) ложно. В этом случае утверждения (2) и (4) истинны. Из них следует, что было заброшено 9 шайб. Число 9 нечетно, поэтому матч не мог завершиться вничью. Следовательно, утверждение (3) ложно. Противоречие. Значит, утверждение (3) ложно. Остальные утверждения истинны, значит было заброшено 9 шайб, причем выиграл «Транспортир». Из утверждения (5) следует, что наименьшее число шайб, заброшенных командой «Линейка» равно 4. Больше 4 шайб «Линейка забросить не могла, потому что тогда бы она выиграла. Следовательно, «Линейка» забросила ровно 4 шайбы, а «Транспортир» — 5 шайб.

Ответ: 5:4 в пользу "Транспортира"

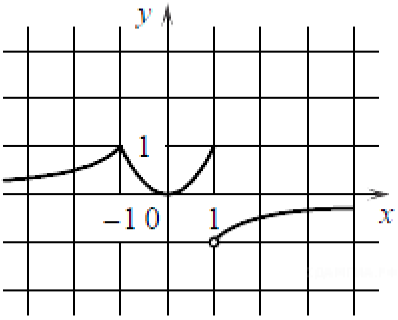
Задание №23

В этом задании ОГЭ требуется либо построить график, либо использовать его для решения конкретных задач. Необходимо, что ученик знал основные функции и умел строить и исследовать простейшие математические модели. Это задание высокого уровня сложности, которое требует творческого подхода. Посильно учащимся 8-9 классов.

Примеры заданий:

1. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2, \text{если } |x| \le 1, \\ -\frac{1}{x}, \text{ если } |x| > 1. \end{cases}$ и определите, при каких значениях параметра с прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение. График функции изображён на рисунке.



Прямая $y = c$ будет иметь с графиком единственную общую точку при $-1 < c < 0$

Ответ: $(-1;0)$

2. Первая прямая проходит через точки $(0; 4{,}5)$ и $(3; 6)$. Вторая прямая проходит через точки $(1; 2)$и $(-4; 7)$. Найдите координаты общей точки этих двух прямых.

Решение. Уравнение прямой $y = kx + b$. Подставляя координаты первой пары точек, получаем систему:

$$\begin{cases} 4{,}5 = k \cdot 0 + b, \\ 6 = k \cdot 3 + b; \end{cases} \quad \begin{cases} b = 4{,}5, \\ 3k = 1{,}5; \end{cases} \quad \begin{cases} b = 4{,}5, \\ k = 0{,}5. \end{cases}$$

Значит, уравнение первой прямой $y = 0{,}5x + 4{,}5$. Аналогично найдем уравнение второй прямой:

$$\begin{cases} 2 = k \cdot 1 + b, \\ 7 = k \cdot (-4) + b; \end{cases} \quad \begin{cases} k + b = 2, \\ -4k + b = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} 5k = -5, \\ k + b = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} k = -1, \\ b = 3. \end{cases}$$

Уравнение второй прямой $y = 3 - x$. Чтобы найти координаты общей точки, решим систему:

$$\begin{cases} y = 0{,}5x + 4{,}5, \\ y = 3 - x; \end{cases} \quad \begin{cases} 3 - x = 0{,}5x + 4{,}5, \\ y = 3 - x; \end{cases} \quad \begin{cases} -1{,}5x = 1{,}5, \\ y = 3 - x; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = 4. \end{cases}$$

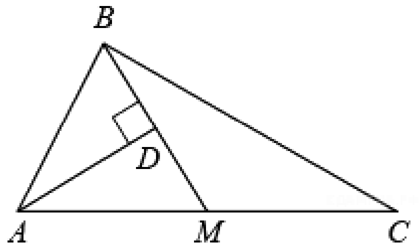
Ответ: $(-1; 4)$.

Модуль «Геометрия»

Задание № 24

Данное задание – это геометрическая задача на вычисление. Учащиеся должны выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами. Определить конкретную тему, которой соответствует это задание, нельзя, так как задачи, встречающиеся в этом номере, могут быть из различных областей геометрии.

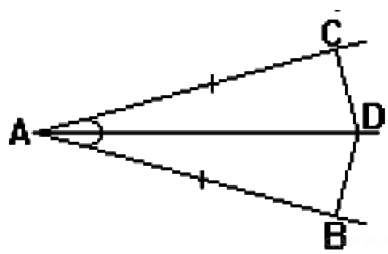
Например, в 7-ом классе могут быть решены вот такие задачи:



Прямая AD, перпендикулярная медиане BM треугольника ABC, делит её пополам. Найдите сторону AC, если сторона AB равна 4.

Решение. Так как высота AD, проведенная к медиане BM делит ее пополам, то треугольник ABM является равнобедренным, поэтому AB=AM=4. Так как BM- медиана, то AM=MC, таким образом, AC=2AM=8.

Ответ: AC=8.

	На сторонах угла BAC, равного 20°, и на его биссектрисе отложены равные отрезки AB, AC и AD. Определите величину угла BDC.

Решение.

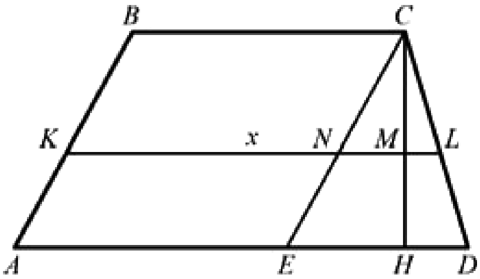
Так как отрезки равны, то треугольники ACD и ABD - равнобедренные. Углы при основании этих треугольников равны: $\frac{180°-10°}{2} = 85°$.Найдем искомый угол: $\angle BDC = 2 \cdot 85° = 170°$.

Ответ: $\angle BDC = 170°$.

Учащимся 8-ых классов можно предложить вот такую задачу:

В трапеции проведен отрезок, параллельный основаниям и делящий ее на две трапеции одинаковой площади. Найдите длину этого отрезка, если основание трапеции равны $24\sqrt{2}$ см и $7\sqrt{2}$ см.

Решение.



Пусть $AD = b, BC = a$. Проведем отрезок KL, делящий трапецию на две равновеликие трапеции и обозначим его длину x. Проведем из C высоту CH и отрезок CE, параллельный стороне AB. Точки пересечения этих отрезков с отрезком KL назовем M и N соответственно.

Из условия следует, что $2(a + x) \cdot CM = (a + b) \cdot CH$.

Из подобия треугольников NCL и ECD следует: $\frac{CM}{CH} = \frac{NL}{ED} = \frac{x-a}{b-a} \Rightarrow CM = \frac{x-a}{b-a} \cdot CH$. Следовательно, $2(a + x) \cdot \frac{x-a}{b-a} = (a + b) \cdot CH$. Разделим обе части равенства на CH: $\frac{2(x^2-a^2)}{b-a} = a + b$, откуда $x^2 - a^2 = \frac{b^2-a^2}{2}; x^2 = \frac{a^2+b^2}{2}; x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

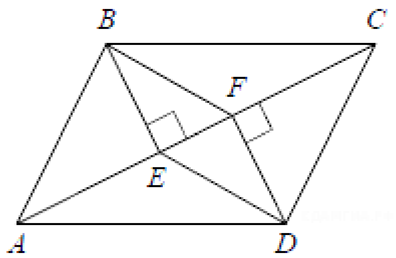
Подставляя $a = 7\sqrt{2}, b = 24\sqrt{2}$, получаем: $x = \sqrt{\frac{2 \cdot 49 + 2 \cdot 576}{2}} = 25$.

Ответ: 25.

Задание №25

Задание №25 – геометрическая задача на доказательство. Учащимся необходимо проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность суждений. Задача будет посильна учащимся 9-ых классов, когда ими будет изучено достаточное количество теорем. Задания могут касаться разных областей геометрии.

Примеры заданий:

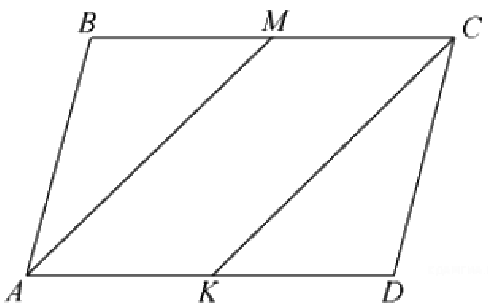


1. В параллелограмме *ABCD* проведены перпендикуляры *BE* и *DF* к диагонали *AC* (см. рисунок). Докажите, что *BFDE* — параллелограмм.

Решение.

Прямоугольные треугольники *ABE* и *CDF* равны по гипотенузе и острому углу (*AB* = *CD* как противолежащие стороны параллелограмма; $\angle BAE = \angle DCF$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых *AB* и *CD* и секущей *AC*). Следовательно, $BE = DF$. Кроме того, $BE \parallel DF$, т. к. это перпендикуляры к одной прямой. Таким образом, в четырёхугольнике *BFDE* противолежащие стороны равны и параллельны, поэтому *BFDE* — параллелограмм.

2. В параллелограмме проведены биссектрисы противоположных углов. Докажите, что отрезки биссектрис, заключенные внутри параллелограмма, равны.



Решение.

ABCD — параллелограмм

AM — биссектриса ∠A, CK — биссектриса ∠C.

Докажите, что AM=CK.

1) $\Delta AMB = \Delta CKD$ по стороне и двум прилежащим к ней углам:

а) $AB = CD$ — по свойству противоположных сторон параллелограмма;

б)$\angle ABM = \angle KDC$ по свойству противоположных углов параллелограмма;

в)$\angle BAM = \angle KCD$ по определению биссектрисы и равенству противоположных углов параллелограмма.

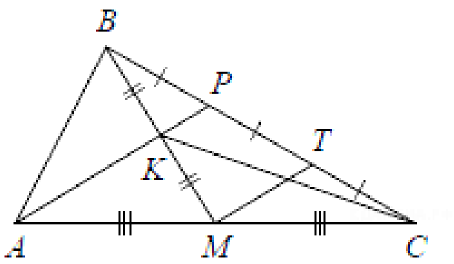
2) $KC = MA$ как соответствующие элементы равных треугольников.

Задание №26

Данное задание – геометрическая задача повышенного уровня сложности. Снова, как и в предыдущих заданиях по геометрии второй части, нельзя прикрепить этот номер к определенной теме, изучаемой в курсе основной школы. Поэтому задание может решить ученик 9-го класса.

<u>Примеры заданий:</u>

1. Через середину *K* медианы *BM* треугольника *ABC* и вершину *A* проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P. Найдите отношение площади треугольника *ABK* к площади четырёхугольника *KPCM*.

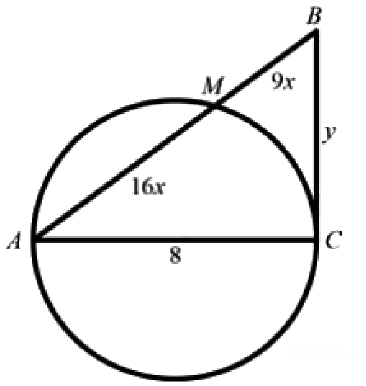


Решение. Проведём отрезок *MT*, параллельный *AP*. Тогда *MT* — средняя линия треугольника *APC* и *CT* = *TP*, а *KP* — средняя линия треугольника *BMT* и *TP* = *BP*.

Обозначим площадь треугольника *BKP* через S. Тогда площадь треугольника *KPC*, имеющего ту же высоту и вдвое больше основание, равна 2S. Значит площадь треугольника *CKB* равна 3S и равна площади треугольника *CMK* (треугольники имеют одну высоту, проведённую из вершины *C*, и равные равные основания), которая в свою очередь равна площади треугольника *AMK*. Площадь треугольника *ABK* равна площади треугольника AMK. Итак, $S_{BKP} = S$, $S_{KPC} = 2S, S_{CMK} = 3S = S_{AMK} = S_{ABK}, S_{KPCM} = 5S$. Значит, $S_{ABK} : S_{KPCM} = 3:5 = 0{,}6$.

Ответ: 0,6.

2. Длина катета AC прямоугольного треугольника ABC равна 8 см. Окружность с диаметром AC пересекает гипотенузу AB в точке M. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что AM:MB=16:9.



Решение.

Пусть BC=y см, AM=16x см и MB=9x см. Поэтому гипотенуза AB=25x см. По теореме Пифагора: $y^2 = 625x^2 - 64$. По теореме о секущей и касательной $y^2 = 25x \cdot 9x = 225x^2$.

Следовательно, $225x^2 = 625x^2 - 64$, откуда $x^2 = \frac{4}{25}$. Тогда $y^2 = 225 \cdot \frac{4}{25}$; $y = \frac{15 \cdot 2}{5} = 6$. Следовательно, площадь треугольника равна $\frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$ см^2.

Ответ: 24 см^2.

Общие выводы по второй части

Вторая часть экзаменационной работы требует не только прочных знаний по всем темам курса «Математики», «Алгебры», «Геометрии», но и творческого подхода к заданиям, иногда даже нестандартного. Так как задания могут быть прикреплены к различным темам, то говорить о их принадлежности к какому-либо классу не стоит. Поэтому лучше сказать, что это задания для выпускников. Лишь некоторые из них можно разобрать на отдельных уроках.

Использованные материалы

1. Официальный информационный портал Государственной итоговой аттестации http://gia.edu.ru/
2. Образовательный портал для подготовки к экзаменам http://сдамгиа.рф
3. Сайт федерального института педагогических измерений http://fipi.ru
4. Математика. 5 класс. Виленкин Н.Я., Жохов В.И. и др. - 14-е изд., стер. - М.: 2013.
5. Математика. 5 класс. Зубарева И.И., Мордкович А.Г. и др. - 14-е изд., испр. и доп. – М.:2010
6. Математика. 6 класс. Учебник. Виленкин Н.Я. и др. - М.: 2013.
7. Математика. 6 класс. Учебник. Зубарева И.И., Мордкович А.Г. и др. - 8-е изд., стер. - М.: 2009.
8. Алгебра. 7 класс. Задачник. Мордкович А.Г. и др. – 17-е изд., стер. – М.:2013
9. Алгебра. 8 класс. Задачник. Мордкович А.Г. и др. –12-е изд., испр. и доп. – М.:2010
10. Алгебра. 9 класс. Задачник. Мордкович А.Г. и др. – 12-е изд., испр. – М.:2010
11. Математика 9 класс. Подготовка к ГИА: учебно-методическое пособие / Под ред. Д.А.Мальцева. – Ростов н/Д: Издатель Мальцев Д.А.; М.: Народное образование, 2014

12.Математика. 9-й класс. Подготовка к ГИА-2014: учебно-методическое пособие / Под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион,2013